Nogle Interpolationsformler for Dobbeltstjerner.

Af

T. N. Thiele.

Det store Flertal af de Dobbeltstjerner, hvis Bevægelse er tydelig nok, til at man ikke umiddelbart kan sammenligne Observationer fra forskjellige Tider, bevæger sig dog altfor langsomt, til at man i de første Aarhundreder skulde blive i Stand til at gjennemføre virkelige Banebestemmelser. Hertil kræves nemlig 7 indbyrdes uafhængige Bestemmelser, og Observationerne ere relativt saa lidet nøjagtige, at selv, hvor Halvdelen af Banen er gjennemløbet under Iagttagelserne, kan et eller flere Elementer ofte være saa godt som fuldstændigt ubestemmelige.

Men medens man saaledes i de fleste Tilfælde maa opgive nu at faa nogen Kundskab om Bevægelsens egentlige Forhold, kan man dog meget vel tilfredsstille vor Tids mest bydende Krav, nemlig med saadanne Beregninger om Observationerne, som kunne oplyse om de begaaede Observationsfejl.

Dertil kunde man ganske vist bruge Formlerne for den elliptiske Banebestemmelse. Syv forskjellige Observationer kan man altid faa, og naar man saa blot dristigt regnede med dem og hvergang man mødte en Ligning, som efter Fejlenes rimelige Størrelse maatte anses for ubestemt, brugte den Ret man derved fik til at gjætte det søgte, saa vilde man til sidst finde en Bane, som rigtignok paa ingen Maade turde udgives for at fremstille den virkelige Bevægelse, men som dog vil tilfredsstille alle de anvendte Observationer med den ønskede Nøjagtighed.

Imidlertid regner man altid med flere Ciffre, end der egentlig tilkommer de givne Værdier, og vil derfor være meget udsat for at anse Ligninger for bestemmende, som egentlig ikke ere det. Faren derved vilde nu i og for sig ikke være stor. Illusioner om Banebestemmelsers Nøjagtighed holde sig ikke længe, og at man førtes til urimelige og fysisk umulige Værdier for Banernes Elementer, vilde ikke forhindre, at de forelagte 7 Observationer bleve fyldestgjorte, men man kunde f. Ex. blive nødt til at regne med imaginære Tal, og let være ude af Stand til at løse de transcendente Ligninger, som skulle behandles. Det værste er dog, at man vilde have store Vanskeligheder ved at nærme Banen ikke blot til de udvalgte 7 Observationer, men til alle dem, der overhovedet ere anstillede. Denne Mislighed potenseres nu, hvis man ved en saadan arbitrær Baneberegning ikke blot paa et eneste Sted har maattet overvinde en Ubestemthed ved Gjætning, men flere Gange efter hinanden maatte gribe til denne Udvej. Derfor vil det ialtfald være praktisk at indskrænke denne Methodes Anvendelse paa Dobbeltstjernerne til saadanne Tilfælde, hvor hele Iagttagelsesmaterialet maa siges at repræsentere 6 indbyrdes uafhængige Værdier, idet Gjætning om et eneste Baneelement (næsten altid Omløbstiden) kan fjerne al Ubestemthed af de Ligninger, der skulle løses. Men hvor der er flerdobbelt Ubestemthed, maa der regnes med Interpolationsformler i Stedet for de exakte Methoder.

Af det sagte fremgaar det, at man for Dobbeltstjernerne maa forsyne sig med et Udvalg af Interpolationsformler, og at de mest komplicerede af disse nødvendigvis maa indeholde 5 Konstanter, som skulle beregnes af Observationerne.

Man kan forlange, at disse Interpolationsformler skulle give let Regning, mindst lige saa let som de elliptiske Formler i deres normale Anvendelse. Men der er desuden noget mere, som maa kræves, og som i det hele taget ikke findes iagttaget ved de Interpolationsformler, som hidtil ere anvendte paa denne Opgave, nemlig at de Egenskaber, som udmærke den virkelige

Bevægelse i korte Tidsrum, ogsaa gjenfindes i Interpolationsformlen. Enhver saadan Singularitet, som udmærker den elliptiske Bane (f. Ex. Maxima og Minima), maa findes repræsenteret i det mindste i én af Interpolationsformlerne, og omvendt bør Interpolationsformlen ikke gjerne have fremtrædende Egenskaber (f. Ex. Inflexion i Banen), som ikke forekomme i de elliptiske Baner. Interpolationsformlen maa kunne opfattes som en afbrudt Rækkeudvikling for den sande Bevægelse. Da denne kun har 7 arbitrære Konstanter, maatte man, hvis Rækkeudviklingen havde et større Antal, reducere dette ved at tage Hensyn til Relationerne mellem Interpolationsformlens Konstanter. Men særlige Forhold kunne bevirke, at der ogsaa maa etableres Relationer imellem et mindre Antal Konstanter i de af Rækkernes første Led, som optages i Interpolationsformlerne, og et saadant Forhold vil netop her være tilstede.

Der foreligger altid to Slags Iagttagelser, nemlig de til givne Tider (t) maalte Afstande (r) og Retninger (Positionsvinkler), R; der maa altsaa i hvert Tilfælde samtidigt benyttes to Interpolationsformler $r = f(t)$ og $R = F(t)$. Men i den elliptiske Bevægelse gjælder Loven om Arealets Proportionalitet med Tiden,

$$\tfrac{1}{2} r^2 \frac{dR}{dt} = k; \tag{1}$$

mellem de to samtidige Interpolationsformler maa der altsaa bestaa en Relation, Differentialligningen

$$2f'(t)\, F'(t) + f(t)\, F''(t) = 0, \tag{2}$$

netop den samme, som i størst Almindelighed udtrykker, at den iagttagne, projicerede Bevægelse styres efter en eller anden Tiltrækningskraft mellem de to Stjerner. Til Fremstilling af Dobbeltstjernernes tilsyneladende Bevægelser egne sig altsaa kun saadanne Par Interpolationsformler $r = f(t)$ og $R = F(t)$, som opfylde den i (2) angivne Betingelse. Man kan vælge enten $r = f(t)$ eller $R = F(t)$ nogenlunde frit, men ved dette Valg bestemmes saa den anden Funktion, dog med

Tilføjelse af en arbitrær Konstant i $f(t)$ eller 2 i $F(t)$. Man kan ogsaa vælge Formlen for den tilsyneladende Tiltrækningskraft som Funktion af Afstanden r vilkaarligt og deraf bestemme begge Interpolationsformlerne med Indførelse af ialt 4 Konstanter.

Man kan saaledes bygge Interpolationsformler paa den Antagelse, at Tiltrækningen for den tilsyneladende Bane var den samme som i den virkelige, omvendt proportional med Afstandens Kvadrat, og man faar derved i den elliptiske Bevægelse om Hovedstjernen som Brændpunkt Formler, som ville være fortrinlige, især naar Baneplanet tilnærmelsesvis er vinkelret mod Synslinien; ved disse Tilnærmelsesformler skal jeg dog ikke opholde mig, saa meget mindre som de, om end aldrig endnu anvendte paa denne Maade, dog ere bekjendte nok.

Derimod er der Grund til at omtale nogle andre Formler, som give endnu langt simplere Regning, og som ofte kunne anvendes endog paa saadanne Tilfælde, hvor den iagttagne Bevægelse har været stor nok til at friste Astronomer til at forsøge egentlige Baneberegninger. De svare alle til den Forudsætning, at Tiltrækningen for den tilsyneladende Bane var omvendt proportional med Kubus af Afstanden. Det er dog ikke i denne Egenskab, at de søge deres Berettigelse til at bruges. Tænker man sig den tilsyneladende Afstands Kvadrat udviklet i Række efter voxende Potenser af Tiden

$$r^2 = l + mt + nt^2 + \dots .$$

vil man, mærkeligt nok, hyppigt finde denne Række hurtigere konvergent, end Rækker for r, R eller $x = r \cos R$ eller $y = r \sin R$. Jeg medtager kun de nævnte tre første Led i min Interpolationsformel, sætter altsaa for $f(t)$ Udtrykket

$$r = \sqrt{l + mt + nt^2}\,; \qquad (3)$$

heraf findes saa ved (2) eller (1) for $F(t)$

$$R = 2k \int \frac{dt}{l + mt + nt^2}$$

$$= Q + \frac{2k}{n(v-u)} \log_{\text{nat}} \frac{t-v}{t-u}, \qquad (4)$$

hvor u og v betegne Rødderne i Ligningen $0 = l + mt + nt^2$. Dersom Rødderne ere komplexe Tal

$$v = w + si$$
$$u = w - si,$$

antager (3) Formen $r = \sqrt{n}\sqrt{s^2 + (t - w)^2}$ (3′)

og (4) bliver $R = P + \frac{2k}{ns} arc \left(\text{tang} \frac{t - w}{s}\right)$. (4′)

Dersom specielt $v = u$, er $r = \sqrt{n}\,(t - u)$ (3″)

og da haves $R = Q - \frac{2k}{n} \frac{1}{t - u}$. (4″)

Er endelig den ene Rod uendelig $n = 0$, $nu = - m$, $v = - \frac{l}{m}$,

haves $r = \sqrt{l + mt}$ (3‴), $R = W + \frac{2k}{m} \log_{\text{nat}} \left(t + \frac{l}{m}\right)$. (4‴)

Det følger af (3), at disse Interpolationsformler ikke kunne give Afstanden mere end enten ét Maximum ((3) og (4)) eller ét Minimum ((3′) og (4′)). Den tilsyneladende Bane kan derimod vise indtil 2 af hvert Slags, deraf følger altsaa, at disse Interpolationsformler ere begrændsede til de Tilfælde, hvor Obervationerne i det højeste omfatte ét Maximum eller Minimum. Med Hensyn til Maximum eller Minimum ere derhos Interpolationsformlernes Baner strengt symmetriske, og da dette almindeligt ikke gjælder for de exakte Love, bliver ogsaa derved Interpolationsformlernes Brug indskrænket.

Ingen af Interpolationsformlernes Baner har Inflexion og Banens Krumning vender imod Hovedstjernen, undtagen i det ene Tilfælde under (3′) og (4′), naar $\frac{ns}{2k} > 1$. Tilfældet $\frac{ns}{2k} = 1$, den retlinede jevne Bevægelse, er altsaa det yderste anvendelige Grændsetilfælde. Afstanden kan aldrig blive uendelig for endeligt t, derimod vel $r = 0$, men kun samtidigt med $R = \infty$, saa at altsaa Ledsageren først skulde kunne naa ind til Hovedstjernen efter at have kredset uendelig mange Gange omkring den.

Hvad Banernes Form angaar, er den velbekjendt for alle de nævnte specielle Tilfælde, hvor Konstanternes Antal er reduceret til 4. (3'') og (4'') tilhøre den hyperbolske Spiral, (3''') og (4''') den logarithmiske Spiral, Tilfældet $\frac{ns}{2k} = 1$ under (3') og (4'), som sagt, den rette Linie.

Den almindelige Form for (3') og (4') afledes let af den rette Linie ved saadan Transformation, at alle Retningerne multipliceres med en Konstant, medens Afstandene ikke forandres. Banen sender altsaa to Grene ud i det uendelige med retlinede Assymptoter. For $1 > \frac{ns}{2k} > \frac{1}{2}$ minder Banens Form om Hyperblen, for $\frac{1}{2} > \frac{ns}{2k} > 0$ krydse de to Grene sig i et endeligt Antal Dobbeltpunkter, der afvexlende ligge i den modsatte og samme Retning som Afstandens Minimum.

Om Formlerne (3) og (4) maa bemærkes, at de naturligt falde i to Tilfælde med væsentligt forskjelligt Udseende af Banerne, alt eftersom n er positiv eller negativ. I første Tilfælde svare der uendelige reelle Afstande til $t = \pm \infty$, for $t = u$ og $t = v$ er $r = 0$. I Mellemtiden mellem u og v er Afstanden imaginær. Banen dannes altsaa af den ene eller den anden af to symmetriske Spiraler om Hovedstjernen. Disse Spiraler danne en jevn Overgang mellem den hyperbolske og logarithmiske Spirals Former; hverken Maximum eller Minimum ere reelle. I andet Tilfælde (med negativt n) ere Afstandene omvendt kun reelle i det endelige Tidsrum mellem u og v. Banen har da et endeligt Maximum for Afstanden svarende til $t = \frac{1}{2}(u + v)$, og danner et symmetrisk Blad, hvis Rande vikle sig uendelig mange Gange om Hovedstjernens Sted.

Til praktisk Regning og til Løsningen af de Opgaver, vi skulle behandle, skrives Interpolationsformlerne bedst i følgende Form:

For (3) og (4) haves

$$\left.\begin{aligned} r\,10^{aR} &= a + bt \\ r\,10^{-aR} &= c + dt \end{aligned}\right\} \text{I.}$$

Eller, naar n er negativ,

$$\left.\begin{aligned} r\,10^{\alpha(R-Q')} &= \sqrt{-n}\,(t-u) \\ r\,10^{\alpha(Q'-R)} &= \sqrt{-n}\,(v-t) \end{aligned}\right\}\ \text{I a;}$$

derimod for n positiv

$$\left.\begin{aligned} r\,10^{\alpha(R-Q)} &= \sqrt{n}\,(t-u) \\ r\,10^{\alpha(Q-R)} &= \sqrt{n}\,(t-v) \end{aligned}\right\}\ \text{I b,}$$

hvor $$k = \frac{n\,(u-v)}{4\,\alpha}\ \mathrm{Log}\ e = \frac{bc-ad}{4\,\alpha}\ \mathrm{Log}\ e.$$

For (3′) og (4′) haves

$$\left.\begin{aligned} r\cos\beta R &= \mathfrak{a} + \mathfrak{b}t \\ r\sin\beta R &= \mathfrak{c} + \mathfrak{d}t \end{aligned}\right\}\ \text{II;}$$

eller

$$\left.\begin{aligned} r\cos\beta\,(R-P) &= \sqrt{n}\,.\,s \\ r\sin\beta\,(R-P) &= \sqrt{n}\,(t-w) \end{aligned}\right\}\ \text{II a,}$$

hvor $$k = \frac{ns}{2\beta} = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{d}-\mathfrak{b}\mathfrak{c}}{2\beta},$$

herved er det forudsat, at R er angivet i Buemaal. I hvert Par af disse Formler indgaa 5 Konstanter.

Efter (3‴) og (4‴) haves

$$\left.\begin{aligned} r^2 &= l + mt \\ R &= A + B\ \mathrm{Log}\ (l+mt) \\ \text{eller}\qquad 10^{\frac{R-A}{2B}} &= r \end{aligned}\right\}\ \text{III.}$$

Efter (3″) og (4″) haves

$$\left.\begin{aligned} r &= a' + b't \\ rR &= c' + d't \end{aligned}\right\}\ \text{IV.}$$

Og endeligt haves under II Formlerne for den retlinede jevne Bevægelse

$$\left.\begin{aligned} r\cos R &= \mathfrak{a} + \mathfrak{b}t \\ r\sin R &= \mathfrak{c} + \mathfrak{d}t \end{aligned}\right\}\ \text{V,}$$

Interpolationsformler med 4 Konstanter.

Under IV ere endelig Interpolationsformlerne $r = a'$, $R = A + Bt$ og $r = a' + b't$, $R = A$ indbefattede som ganske specielle Tilfælde, og disse ere uden Tvivl de eneste Formler med kun 3 Konstanter, som behøves.

Det er yderligt let at regne Efemerider efter disse Formler, det er heller ikke svært at bestemme Konstanterne ved Observationerne. Men man kan, hvor Talen er om Dobbeltstjerner, ikke saaledes som ved Planeter eller Kometer opstille et bestemt Skema for Regningen, der nogenlunde kan følges i alle Tilfælde. Man maa overfor Dobbeltstjerner give Regneren frit Valg mellem flere forskjellige Methoder, og Resultatet vil afhænge meget af, at han ledet af Erfaring og fin Takt vælger den rette Methode. Aarsagen hertil er først og fremmest, at mindste Kvadraters Methode svigter overfor de stærke systematiske Fejl, som vanhelde Mikrometermaalingerne. Sir John Herschel har som bekjendt foreslaaet at erstatte den efterfølgende Behandling efter mindste Kvadraters Methode med en forudgaaende grafisk Interpolation og Beregning af den ene Koordinat ved den anden ifølge Loven om Arealernes Proportionalitet med Tiden. Midlet er godt, om end ikke helt frit for at give Vilkaarligheden for stort Spillerum. Men det maa anvendes ikke blot ensidigt paa Retningsmaalingerne, men, som jeg for længst har gjort (se Undersøgelser om Banebevægelsen i Dobbeltstjernesystemet γ Virginis), ligesaavel paa Afstandene, og bedst er det at kunne undvære disse indledende Operationer. De vare nødvendige, saa længe man udelukkende lagde an paa strax at beregne alle Banens 7 Elementer uden Hensyn til, om Iagttagelserne vare omfattende nok. Ved Brugen af Interpolationsformler vil man kunne frigjøre sig for den grafiske Interpolation. Idet man reducerer Konstanternes Antal, kan man faa brugbare første Tilnærmelser ud af raa Observationer, og det er let gjennem Dannelse og Forbedring af Normalpladser lidt efter lidt at nærme sig Maalet.

Men Umuligheden af at behandle alle Dobbeltstjerner paa en og samme Maade har en anden, fuldt saa væsentlig Grund i den store og, som det synes, regelløse Forskjel mellem de enkelte Stjernepars Bevægelser. Intet Element kan tilnærmelsesvis kjendes forud, alle Excentriciteter, alle Heldninger o. s. v. findes omtrent ligeligt repræsenterede, og selv, hvor Formen af den tilsyneladende Bane er ens, kan Banernes forskjellige Størrelse (Forskjellen mellem tilsvarende Synsvinkler) kræve aldeles forskjellig Regnemaade. Forskjellen medfører snart, at Afstandsmaalingerne skulle foretrækkes for Retningsmaalingerne til Bestemmelse af de Elementer, som kunne afledes af begge Slags, snart lige det modsatte Forhold. Men én Del af Observationerne kan altid anses for fejlfri, nemlig Tiden, paa hvilken Observationerne ere anstillede. Det er derfor en meget stor (og desværre hyppig) Fejl at bruge eller anbefale Methoder til Baneberegning, som væsentlig støtte sig til Kombinationer af Afstande og Retninger, ved hvilke Observationstiden behandles som ubekjendt. Iagttagelsesgrundlaget for enhver Beregning af Bane eller Interpolationsformel skal altid bestaa i Kombinationer af de to Slags, Tid-Afstand og Tid-Retning, og Forskjellen i Methoderne viser sig da i de forskjellige Antal af disse Kombinationsarter, der forudsættes givet. Der maa nødvendigvis medtages mindst en Iagttagelse, Tid-Afstand til Bestemmelse af Afstandsenheden. Ved Baneberegninger er det derhos nødvendigt, at mindst en Iagttagelse har Formen Tid-Retning; vore Interpolationsformler kræve endog, at mindst to Iagttagelser have denne Form, idet nemlig ikke blot Grundretningen, men ogsaa Retningernes Enhed maa fastsættes ved Observationer af denne Koordinat.

Ved de fleste Methoder er det fordelagtigt, ved nogle endog saa godt som nødvendigt, at nogle af Afstandsmaalingernes og Retningsmaalingernes Tider falde nøjagtigt sammen. Dette er forsaavidt uheldigt, som det gode Udfald af en Beregning ikke blot afhænger af, at den ene Slags Observationer ikke faar en uberettiget Overmagt over den anden, men ogsaa af, at de enkelte udvalgte Observationer eller Normalpladser tages fra saadanne Tider, at de saa godt som muligt komme til at repræsentere hele Iagttagelsesrækken, altsaa f. Ex. forholdsvis mange Positionsvinkler fra saadanne Tider, hvor Afstanden har været liden, Vinkelhastigheden stor, medens Afstandsobservationerne især skulle vælges fra de Tider, hvor Afstanden selv har været stor eller dens Forandring hastig. Det kan være vanskeligt nok at fyldestgjøre disse Fordringer, naar Valget er frit, men Vanskeligheden forøges stærkt, naar der skal benyttes Kombinationer af Formen Tid-Afstand og Retning.

Her skal nu meddeles Regneregler for mine forskjellige Interpolationsformler, ordnede principaliter efter de forskjellige Antal benyttede Afstande, r, og Retninger, R, sekundært efter de forskjellige anvendte Sæt Formler, I, II, III, IV eller V.

3. r og 2. R.

Naar 3 Afstande og 2 Retninger benyttes, kunne Tiderne være valgte uden nogen Indskrænkning. Regningen selv viser, om Interpolationsformlen bliver af Formen I eller II. Af de 3 Afstande r_1, r_2 og r_3, som svare til Tiderne t_1, t_2 og t_3, beregnes først l, m og n ved de tre Ligninger,

$$r_1^2 = l + mt_1 + nt_1^2,$$
$$r_2^2 = l + mt_2 + nt_2^2,$$
$$r_3^2 = l + mt_3 + nt_3^2.$$

Paa Fortegnet for $m^2 - 4\,ln$ ses det da, om Ligningen

$$0 = l + mt + nt^2$$

har reelle eller imaginære Rødder.

1) I første Tilfælde udregnes disse Rødder

$$v = (-m + \sqrt{m^2 - 4\,ln}) : 2\,n,$$
$$u = (-m - \sqrt{m^2 - 4\,ln}) : 2\,n.$$

Hvis nu $n > 0$, maa Tiderne u og v begge falde enten før eller efter samtlige Observationstider, ikke blot t_1, t_2 og t_3, men ogsaa t_4 og t_5, til hvilke de observerede Retninger R_4 og R_5 svare. Man vil da ved Ligningerne

$$2\,a(R_4 - Q) = \text{Log}\,(t_4 - u) - \text{Log}\,(t_4 - v)$$
$$2\,a(R_5 - Q) = \text{Log}\,(t_5 - u) - \text{Log}\,(t_5 - v)$$

(Log betyder Briggisk Logarithme)

finde Konstanterne α og Q, og dermed have Formlerne

$$\left.\begin{aligned} r\,10^{\alpha(R-Q)} &= \sqrt{n}\,(t-u) \\ r\,10^{\alpha(Q-R)} &= \sqrt{n}\,(t-v) \end{aligned}\right\}\text{I a}$$

færdige, idet $\sqrt{n}$ bliver at tage med samme Fortegn som $t-u$ og $t-v$ have.

Er derimod $n<0$, vil Tiden u falde før, v efter samtlige Observationstider, og da beregnes α og Q' ved Ligningerne

$$2\,\alpha(R_4-Q') = \text{Log}\,(t_4-u) - \text{Log}\,(v-t_4)$$
$$2\,\alpha(R_5-Q') = \text{Log}\,(t_5-u) - \text{Log}\,(v-t_5)$$

til Formlerne

$$\left.\begin{aligned} r\,10^{\alpha(R-Q')} &= \sqrt{n}\,(t-u) \\ r\,10^{\alpha(Q'-R)} &= \sqrt{n}\,(v-t) \end{aligned}\right\}\text{I b.}$$

I dette Tilfælde findes for Maximum af Afstand $t_m = \frac{1}{2}(u+v)$, $R_m = Q'$ og $r_m = \frac{1}{2}\sqrt{-n}\,(v-u)$.

2) Har derimod $0 = l + mt + nt^2$ imaginære Rødder, da vil n altid være positiv, og da beregnes

$$w = -\frac{m}{2n}$$
$$s = \sqrt{4\,ln - m^2} : 2n.$$

Af Tiderne t_4 og t_5 for Retningsobservationerne beregnes derefter β og P ved de to Ligninger

$$\beta\,(R_4-P) = arc\left(\text{tang} = \frac{t_4-w}{s}\right)$$
$$\beta\,(R_5-P) = arc\left(\text{tang} = \frac{t_5-w}{s}\right).$$

Saa haves alle Konstanterne for Formlerne

$$\left.\begin{aligned} r\cos\beta\,(R-P) &= \sqrt{n}\,s \\ r\cos\beta\,(R-P) &= \sqrt{n}\,(t-w) \end{aligned}\right\}\text{II a.}$$

Minimum af Afstand haves for $t_m = w$, $R_m = P$ og $r_m = \sqrt{n}\,s$.

Disse Regninger give yderligere til Kjende, naar der kan være Grund til at forsøge Anvendelsen af en af de simplere Interpolationsformler III, IV eller V med 4 Konstanter, og hvilken af dem det skal være.

2. r og 2. R.

3) Naar ved ovenstaaende Beregninger efter ($3\,r$ og $2\,R$) Konstanten n har været lille, bør det forsøges, om man ved at udelade den ene Afstand, kan finde Formler III, som tilfredsstille Observationerne. Man har da først at beregne l og m af

$$r_1^2 = l + mt_1$$
$$r_2^2 = l + mt_2\,,$$

dernæst A og B af

$$R_3 = A + B \text{ Log } (l + mt_3)$$
$$R_4 = A + B \text{ Log } (l + mt_4).$$

4) Har derimod $m^2 - 4\,nl$ været lille, positiv eller negativ, da prøves Formlerne IV. Man beregner a' og b' af

$$r_1 = a' + b't_1$$
$$r_2 = a' + b't_2$$

og c' og d' af

$$(a' + b't_3)\,R_3 = c' + d't_3$$
$$(a' + b't_4)\,R_4 = c' + d't_4.$$

Og saaledes vil man overhovedet strax have at regne, dersom de iagttagne Forandringer have været meget smaa baade i Afstand og Retning.

5) Naar endelig β kun havde afveget lidet fra 1 i Beregningen af II ved ($3\,r$ og $2\,R$), eller dersom Unøjagtigheden i Observationerne skulde lade β vise sig større end 1, saa at Banens konvexe Side vilde vende mod Hovedstjernen, da bør man efter V beregne en retlinet Bane.

Har man her kunnet tage samtidige Afstande og Retninger i Brug, vil heller ikke dette Tilfælde volde nogen Vanskelighed. Man behøver jo da blot at forvandle de polære Koordinater til retvinklede. Men har man ikke kunnet vælge Observationerne paa denne Maade, bliver Sagen noget vanskeligere. Svare de givne Værdier t_1 og r_1, t_2 og r_2, t_3 og R_3 samt t_4 og R_4 til hinanden, kan man dog først ved Elimination danne sig en

Ligning, hvori alene det ubekjendte Forhold, k, mellem Areal og Tid indgaar; sættes $x = 2k = ns$, da findes

$$r_1^2 r_2^2 - x^2 (t_2 - t_1)^2$$

$$= \left\{ \frac{x \cot(R_4 - R_3)(t_4 - t_3).(t_2 - t_1)^2 - r_1^2.(t_2 - t_3)(t_2 - t_4) - r_2^2.(t_1 - t_3)(t_1 - t_4)}{(t_2 - t_1)^2 \quad - (t_2 - t_3)(t_2 - t_4) - \quad (t_1 - t_3)(t_1 - t_4)} \right\}^2,$$

som maa ordnes efter Potenser af x og løses. Hvilken af de to Rødder, man skal bruge, vil man i Reglen let kunne se paa en uafhængig omtrentlig Bestemmelse af Forholdet mellem Areal og Tid, ved en Ligning $x(t_m - t_n) = r_m r_n \sin(R_m - R_n)$ med andre Observationer. Naar x er fundet, kan man beregne l, m og n af de tre Ligninger

$$r_1^2 = l + mt_1 + nt_1^2$$

$$r_2^2 = l + mt_2 + nt_2^2$$

$$x(t_4 - t_3) \cot(R_4 - R_3) = l + m\frac{t_3 + t_4}{2} + nt_3 t_4.$$

Ligningen $4x^2 = 4ln - m^2$ kan nu bruges til Prøve. Derefter beregnes

$$w = -m : 2n \quad \text{og} \quad s = x : n.$$

Tilsidst har man da i Ligningerne,

$$r \cos(R - P) = \sqrt{n} . s$$

$$r \sin(R - P) = \sqrt{n}(t - w),$$

for t_3 med R_3 og t_4 med R_4 Midler til at beregne baade r_3 og r_4 og to Værdier af den endnu ubekjendte Konstant P. At disse skulle stemme nøjagtigt overens, er tilsidst en ikke overflødig Prøve paa hele Regningen.

2. r og 3. R.

Tilfælde, hvor man rettelig skal bruge 2 Afstande og 3 Retninger til Bestemmelse af Interpolationsformlernes Konstanter ville hyppigt forekomme, især naar man enten skal anvende ældre Observationer, hvor kun Retningerne ere nogenlunde paalidelige, eller naar Afstanden i en Del af Observationstiderne har været meget lille: Dersom der her ikke kan opstilles samtidige Observationer af Afstand og Retning, nødes man til en indirekte og temmelig besværlig Regning, idet man da maa gjøre Hypothese om en tredie Afstand til vilkaarlig Tid, hermed gjennemføre Regningen som under Methoden ($3 . r$ og $2 . R$) og tilsidst prøve Hypothesen paa, om Overensstemmelse er opnaaet mellem den ikke benyttede Retningsobservation og dens Værdi derfor, som den hypothetiske Regning giver. Herved maa man være forberedt paa flerdobbelt Løsning.

6) Men ere begge Afstandsmaalinger samtidige med to af Retningsmaalingerne, da kan man vel ikke undgaa indirekte Regning, men denne bliver meget simplere og Tilnærmelsesformler kunne angives. Man ser let af Formerne I og II, at hele Vanskeligheden vil bestaa i at bestemme α eller β. Man kan nu med de givne Værdier t_1, r_1, R_1; t_2, r_2, R_2; t_3, R_3 danne en Ligning, hvori blot henholdsvis α eller β forekommer ubekjendt. For at danne denne, tænke man sig foreløbigt den ubekjendte Afstand, r_3, holdt tilbage i Ligningerne I og II, indtil de ubekjendte Konstanter a, b, c, d eller $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ ere eliminerede. Eliminerer man saa ogsaa r_3 faas

$$\frac{t_3 - t_1}{t_3 - t_2} \cdot \frac{r_2}{r_1} = \frac{10^{\alpha(R_3 - R_1)} - 10^{\alpha(R_1 - R_3)}}{10^{\alpha(R_3 - R_2)} - 10^{\alpha(R_2 - R_3)}}$$

eller

$$\frac{t_3 - t_1}{t_3 - t_2} \cdot \frac{r_2}{r_1} = \frac{\sin \beta (R_3 - R_1)}{\sin \beta (R_3 - R_2)}.$$

Heraf skal nu α eller β bestemmes ved Forsøg. Men da man ved disse Interpolationsformler altid maa forudsætte, at Bevægelserne ikke have været særdeles store, kan man tilnærmelsesvis beregne α eller β, og det tilmed ved en og samme Rækkeudvikling. Tænker man sig R udtrykt i Grader, kan man nemlig sætte

$$\left(\frac{\alpha}{\text{Log } e}\right)^2 = -\left(\frac{\beta\pi}{180}\right)^2 = \gamma$$

og saa har man

$$\frac{t_3-t_1}{r_1(R_3-R_1)}:\frac{t_3-t_2}{r_2(R_3-R_2)}=\frac{N_1}{N_2}=$$
$$=\frac{1+\frac{1}{6}\gamma(R_3-R_1)^2+\frac{1}{120}\gamma^2(R_3-R_1)^4+\ldots.}{1+\frac{1}{6}\gamma(R_3-R_2)^2+\frac{1}{120}\gamma^2(R_3-R_2)^4+\ldots.}$$

heraf følger, som Tilnærmelsesformel for γ,

$$\frac{1}{\gamma}+\tfrac{1}{30}((R_3-R_1)^2+(R_3-R_2)^2)=\tfrac{1}{12}\frac{N_1+N_2}{N_1-N_2}((R_3-R_1)^2-(R_3-R_2)^2)$$
$$=\frac{1}{6\log_{\text{nat}}\left(\frac{N_1}{N_2}\right)}((R_3-R_1)^2-(R_3-R_2)^2).$$

Afviger nu Forholdet $N_1 : N_2$ ikke mere fra 1, end at de to Udtryk paa højre Side af denne Ligning stemme overens, da kan man være temmelig sikker paa Rigtigheden af denne Bestemmelse af γ. Men stemme de ikke, da kan man vælge en af de to Værdier eller en mellemliggende, deraf beregne γ og af denne beregne en foreløbig Værdi for α eller β.

6a) Har γ været positiv, da føres vi til Formel I og have som første Tilnærmelse $\alpha=\sqrt{\gamma}\,10^{9\cdot637784}$. Den angivne Form for den exakte Ligning for α er ikke videre bekvem til at regne med. Vi indføre derfor Funktionen

$$\varphi(x)=\frac{10^x-10^{-x}}{2x},$$

for hvis Logarithmer medfølgende første Tavle er beregnet, og have dermed exakt

$$\frac{t_3-t_1}{r_1(R_3-R_1)}:\frac{t_3-t_2}{r_2(R_3-R_2)}=\frac{N_1}{N_2}=\frac{\varphi(\alpha(R_3-R_1))}{\varphi(\alpha(R_3-R_2))},$$

der egner sig godt til successiv Forbedring af α's Værdi. Naar α endelig er fundet, beregnes de fire andre Konstanter let ved Ligningerne

$$r_1\,10^{\alpha R_1}=a+bt_1,\qquad r_1\,10^{-\alpha R_1}=c+dt_1,$$
$$r_2\,10^{\alpha R_2}=a+bt_2,\qquad r_2\,10^{-\alpha R_2}=c+dt_2.$$

6b) Viser γ sig negativ, bliver det Formen II, der skal bruges. Naar R udtrykkes i Grader haves da som første Tilnærmelse til β, Formlen $\beta=\sqrt{-\gamma}\,10^{1\cdot758123}$. I dette Tilfælde kunde man anvende den strenge Ligning for β i dens uforandrede Form

$$\frac{t_3 - t_1}{t_3 - t_2} \cdot \frac{r_2}{r_1} = \frac{\sin \beta (R_3 - R_1)}{\sin \beta (R_3 - R_2)},$$

men man kan forøvrigt ogsaa her anvende et Kunstgreb, som er analogt med det ved forrige Tilfælde omtalte og med Funktionen $\psi(x) = \frac{\sin x}{x}$, for hvis Logarithmer en Tavle medfølger, regne efter Formlen

$$\frac{t_3 - t_1}{r_1(R_3 - R_1)} : \frac{t_3 - t_2}{r_2(R_3 - R_2)} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{\psi(\beta(R_3 - R_1))}{\psi(\beta(R_3 - R_2))},$$

til man har fundet den definitive Værdi for β. De 4 øvrige Konstanter beregnes saa af

$$r_1 \cos \beta R_1 = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} t_1, \qquad r_1 \sin \beta R_1 = \mathfrak{c} + \mathfrak{d} t_1,$$
$$r_2 \cos \beta R_2 = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} t_2, \qquad r_2 \sin \beta R_2 = \mathfrak{c} + \mathfrak{d} t_2.$$

I begge Tilfælde af denne Methode ved 2 Afstande og 3 Positionsvinkler, hvoraf to samtidige med Afstandene, er der et Undtagelsestilfælde, som man maa vogte sig for. Selvfølgeligt faar man ubestemt Løsning, naar to af de tre Observationstider ligge hinanden meget nær, men desuden faar man, som Ligningerne for α og β vise, ubestemt Løsning i et Tilfælde, som man let fristes til at anvende, nemlig naar $R_3 = \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$. I dette Tilfælde kan α eller β ikke bestemmes, der maa derimod mellem de givne Værdier bestaa Relationen $r_1(t_2 - t_3) + r_2(t_1 - t_3) = 0$.

Ogsaa her viser Regningen let, om der kan være Udsigt til at tilfredsstille Observationerne ved de simplere Formler III, IV eller V. Men det vil afhænge af de specielle Omstændigheder, om man i saadanne Tilfælde skal regne som ovenfor med 2 Afstande og 2 Retninger eller efter følgende Methoder:

1. r og 3. R.

7) For med en enkelt Afstand og tre Positionsvinkler at beregne Konstanterne i Formel III, maa man først søge B bestemt ved de tre Ligninger af Formen

$$l + mt = 10^{\frac{R-A}{B}},$$

man har da

$$\frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1} = \frac{10^{\frac{R_3}{B}} - 10^{\frac{R_2}{B}}}{10^{\frac{R_2}{B}} - 10^{\frac{R_1}{B}}}$$

eller

$$\frac{t_3 - t_2}{R_3 - R_2} : \frac{t_2 - t_1}{R_2 - R_1} = 10^{\frac{R_3 - R_1}{2B}} \frac{\varphi\left(\frac{R_3 - R_2}{2B}\right)}{\varphi\left(\frac{R_2 - R_1}{2B}\right)}.$$

Da φ'erne her ikke variere stærkt, og Hovedvirkningen af en Forandring af B falder paa den rent exponentielle Faktor, vil man let komme til den rette Værdi for B ved at beregne φ'erne med en gjættet Værdi for B og ved at forbedre denne ved den deraf følgende Værdi for $10^{\frac{R_3 - R_1}{2B}}$. Er B først bekjendt, da beregnes $l 10^{\frac{A}{B}}$ og $m 10^{\frac{A}{B}}$ ved to af Retningsobservationerne, efter Ligningerne

$$\left(l\,10^{\frac{A}{B}}\right) + \left(m\,10^{\frac{A}{B}}\right) t_1 = 10^{\frac{R_1}{B}}$$

$$\left(l\,10^{\frac{A}{B}}\right) + \left(m\,10^{\frac{A}{B}}\right) t_2 = 10^{\frac{R_2}{B}}.$$

Tilsidst giver da Afstandsobservationen

$$r_4^2 = l + mt_4 = 10^{\frac{R_4 - A}{B}}$$

den endnu ubekjendte Konstant A, og den fælles Enhed for l og m.

8) Skal man med samme Fordeling af det givne regne efter Formel IV, da ville de ubekjendte Afstande r_1, r_2 og r_3 henholdsvis være proportionale med

$$\frac{R_3 - R_2}{t_3 - t_2}, \quad \frac{R_3 - R_1}{t_3 - t_1} \quad \text{og} \quad \frac{R_2 - R_1}{t_2 - t_1}.$$

Man vil altsaa have

$$\frac{R_3 - R_2}{t_3 - t_2} = \frac{a'}{\varepsilon} + \frac{b'}{\varepsilon} t_1$$

$$\frac{R_2 - R_1}{t_2 - t_1} = \frac{a'}{\varepsilon} + \frac{b'}{\varepsilon} t_3$$

til Beregning af $\frac{a'}{\varepsilon}$ og $\frac{b'}{\varepsilon}$, derefter bestemmes den ubekjendte Enhed for Afstandene, ε, ved

$$r_4 = \varepsilon\left(\frac{a'}{\varepsilon} + \frac{b'}{\varepsilon} t_4\right)$$

og af

$$\varepsilon \frac{R_3 - R_2}{t_3 - t_2} . R_1 = c' + d' t_1$$

$$\varepsilon \frac{R_2 - R_1}{t_2 - t_1} . R_3 = c' + d' t_3$$

findes Konstanterne c' og d'.

9) Lige saa let og ganske analogt beregnes Konstanterne efter Formel V for den retlinede jevne Bevægelse. Her ere Afstandene r_1, r_2 og r_3 proportionale med henholdsvis

$$\frac{\sin (R_3 - R_2)}{t_3 - t_2}, \quad \frac{\sin (R_3 - R_1)}{t_3 - t_1} \quad \text{og} \quad \frac{\sin (R_2 - R_1)}{t_2 - t_1},$$

man kan derfor ved

$$\cos R_1 \frac{\sin (R_3 - R_2)}{t_3 - t_2} = \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{e}} + \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{e}} t_1$$

og

$$\cos R_3 \frac{\sin (R_2 - R_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{e}} + \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{e}} t_3$$

beregne $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{e}}$ og $\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{e}}$, og ved

$$\sin R_1 \frac{\sin (R_3 - R_2)}{t_3 - t_2} = \frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{e}} + \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{e}} t_1$$

og

$$\sin R_3 \frac{\sin (R_2 - R_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{e}} + \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{e}} t_3$$

beregne $\frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{e}}$ og $\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{c}}$. Tilsidst bestemmes saa den ubekjendte Enhed, $\mathfrak{e}$, for $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ og $\mathfrak{d}$ tillige med den ubekjendte Retning, R_4, ved

$$\frac{1}{\mathfrak{e}} r_4 \cos R_4 = \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{e}} + \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{e}} t_4$$

og

$$\frac{1}{\mathfrak{e}} r_4 \sin R_4 = \frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{e}} + \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{e}} t_4 .$$

1. r og 4. R.

10) Med en enkelt Afstand og 4 Retningsobservationer bør man kun regne i saadanne Tilfælde, hvor Afstanden har været lille og derfor kun sjældent eller slet ikke er bleven nøjagtigt maalt. Har Bevægelsen i Positionsvinkel ikke været meget betydelig, kan en forberedende grafisk Udjevning let blive nødvendig for at formindske Fejlenes Indflydelse paa de mange tæt paa hinanden følgende ensartede Regningsdata.

Vi fandt ovenfor (ved $2 . r$ og $3 . R$) en Ligning af Formen

$$\frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1} \cdot \frac{r_1}{r_3} = \frac{10^{\alpha(R_3 - B_2)} - 10^{\alpha(R_2 - R_3)}}{10^{\alpha(R_2 - R_1)} - 10^{\alpha(R_1 - R_2)}} = \frac{\sin \beta (R_3 - R_2)}{\sin \beta (R_2 - R_1)},$$

til denne føje vi nu en anden af samme Form,

$$\frac{t_4 - t_3}{t_1 - t_4} \cdot \frac{r_1}{r_3} = \frac{10^{\alpha(R_4 - R_3)} - 10^{\alpha(R_3 - R_4)}}{10^{\alpha(R_1 - R_4)} - 10^{\alpha(R_4 - R_1)}} = \frac{\sin \beta (R_4 - R_3)}{\sin \beta (R_1 - R_4)},$$

af disse eliminere vi Forholdet mellem de ubekjendte Afstande r_1 og r_3 og finde saaledes en Ligning, hvori α eller β er eneste ubekjendte.

$$\frac{(t_3 - t_2)(t_1 - t_4)}{(t_4 - t_3)(t_2 - t_1)} = \frac{10^{\alpha(R_3 - R_2)} - 10^{\alpha(R_2 - R_3)}}{10^{\alpha(R_4 - R_3)} - 10^{\alpha(R_3 - R_4)}} \cdot \frac{10^{\alpha(R_1 - R_4)} - 10^{\alpha(R_4 - R_1)}}{10^{\alpha(R_2 - R_1)} - 10^{\alpha(R_1 - R_2)}}$$

$$= \frac{\sin \beta (R_3 - R_2) \sin \beta (R_1 - R_4)}{\sin \beta (R_4 - R_3) \sin \beta (R_2 - R_1)}.$$

Skriver man her for Tidernes og Retningernes anharmoniske Forhold

$$\mathsf{T} = \frac{(t_3 - t_2)\,(t_1 - t_4)}{(t_4 - t_3)\,(t_2 - t_1)} \quad \text{og} \quad \mathsf{R} = \frac{(R_3 - R_2)\,(R_1 - R_4)}{(R_4 - R_3)\,(R_2 - R_1)},$$

da bliver Ligningen for α eller β

$$\frac{\mathsf{T}}{\mathsf{R}} = \frac{\varphi(\alpha(R_3 - R_2))\,\varphi(\alpha(R_1 - R_4))}{\varphi(\alpha(R_4 - R_3))\,\varphi(\alpha(R_2 - R_1))} = \frac{\psi(\beta(R_3 - R_2))\,\psi(\beta(R_1 - R_4))}{\psi(\beta(R_4 - R_3))\,\psi(\beta(R_2 - R_1))}$$

og fælles for begge Tilfælde haves Rækkeudviklingen

$$\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{R}} = \frac{1 + \frac{\gamma}{12}(\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2) + \frac{\gamma^2}{360}(\mathrm{A}^4 + \mathrm{A}^2\mathrm{B}^2 + \mathrm{B}^4) + \ldots}{1 + \frac{\gamma}{12}(\mathrm{A}^2 + \mathrm{C}^2) + \frac{\gamma^2}{360}(\mathrm{A}^4 + \mathrm{A}^2\mathrm{C}^2 + \mathrm{C}^4) + \ldots}$$

$$\mathrm{A} = R_4 - R_3 + R_2 - R_1$$
$$\mathrm{B} = R_4 + R_3 - R_2 - R_1$$
$$\mathrm{C} = R_4 - R_3 - R_2 + R_1.$$

Heraf følger saa Tilnærmelsesformlerne

$$\frac{1}{\gamma} + \frac{6\,\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2}{120} = \frac{1}{24}\frac{\mathrm{T} + \mathrm{R}}{\mathrm{T} + \mathrm{R}}(\mathrm{B}^2 - \mathrm{C}^2)$$
$$= \frac{1}{12}\frac{\mathrm{B}^2 - \mathrm{C}^2}{\log_{\mathrm{nat}}\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{R}}}.$$

Af denne Værdi for γ beregnes saa ligesom i Tilfældet ($2\,r$ og $3\,R$) foreløbige Værdier for α eller β, eftersom γ var positivt eller negativt, og disse foreløbige Værdier prøves og forbedres ved de exakte Ligninger.

10 a) Naar α endelig er bestemt, beregnes Værdier for mindst to af Afstandene r_1, r_2 eller r_3 paa den ubekjendte Faktor (123) nær ved Ligningerne

$$(123)\,r_1 = \frac{(R_3 - R_2)\,\varphi(\alpha(R_3 - R_2))}{t_3 - t_2}$$
$$(123)\,r_2 = \frac{(R_1 - R_3)\,\varphi(\alpha(R_1 - R_3))}{t_1 - t_3}$$
$$(123)\,r_3 = \frac{(R_2 - R_1)\,\varphi(\alpha(R_2 - R_1))}{t_2 - t_1}$$

derefter beregnes de med samme Faktor multiplicerede Værdier for Konstanterne a, b, c og d i I ved

$$(123)\,r_1 10^{\alpha R_1} = (123)a + (123)bt_1,\quad (123)r_1 10^{-\alpha R_1} = (123)c + (123)dt_1,$$
$$(123)\,r_3 10^{\alpha R_3} = (123)a + (123)bt_3,\quad (123)r_3 10^{-\alpha R_1} = (123)c + (123)dt_1,$$

og tilsidst findes ved den hidtil ikke benyttede Afstand r_5 til Tiden t_5 Faktoren (123) ved

$$(123)^2 r_5^2 = ((123)\,a + (123)\,bt_5)\;((123)\,c + (123)\,dt_5).$$

10b) Hvis det var β, man havde fundet, haves

$$[123] r_1 = \frac{\sin \beta (R_3 - R_2)}{t_3 - t_2}$$

$$[123] r_3 = \frac{\sin \beta (R_2 - R_1)}{t_2 - t_1},$$

og dermed for de med Faktoren [123] multiplicerede Konstanter i II

$$[123] r_1 \cos \beta R_1 = [123] \mathfrak{a} + [123] \mathfrak{b} t_1,$$
$$[123] r_1 \cos \beta R_3 = [123] \mathfrak{a} + [123] \mathfrak{b} t_3,$$

$$[123] r_1 \sin \beta R_1 = [123] \mathfrak{c} + [123] \mathfrak{d} t_1,$$
$$[123] r_1 \sin \beta R_3 = [123] \mathfrak{c} + [123] \mathfrak{d} t_3,$$

og til Bestemmelse af Faktoren [123] haves, idet tillige R_5 kan beregnes

$$[123] r_5 \cos \beta R_5 = [123] \mathfrak{a} + [123] \mathfrak{b} t_5,$$
$$[125] r_5 \sin \beta R_5 = [123] \mathfrak{c} + [123] \mathfrak{d} t_5.$$

Methoden her er ikke udsat for andre Undtagelsestilfælde med ubestemt Løsning end saadanne, hvor to eller flere af de benyttede Retninger falde for nær ved hinanden. Dette Tilfælde kan det ved smaa Bevægelser være vanskeligt nok at undgaa. Betingelsen for ubestemt α eller β er

$$\begin{vmatrix} 1, & R_1, & 10^{2\alpha R_1}, & 10^{-2\alpha R_1} \\ 1, & R_2, & 10^{2\alpha R_2}, & 10^{-2\alpha R_2} \\ 1, & R_3, & 10^{2\alpha R_3}, & 10^{-2\alpha R_3} \\ 1, & R_4, & 10^{2\alpha R_4}, & 10^{-2\alpha R_4} \end{vmatrix} = 0$$

eller

$$\begin{vmatrix} 1 & R_1 & \cos 2\beta R_1 & \sin 2\beta R_1 \\ 1 & R_2 & \cos 2\beta R_2 & \sin 2\beta R_2 \\ 1 & R_3 & \cos 2\beta R_3 & \sin 2\beta R_3 \\ 1 & R_4 & \cos 2\beta R_4 & \sin 2\beta R_4 \end{vmatrix} = 0$$

og ved Betragtning af de bekjendte Figurer for Kurverne

$$y = f + gx + he^x - ke^{-x}$$
$$y = f + gx + h \cos x + k \sin x$$

overtyder man sig let om, at den første Ligning ikke har andre reelle Løsninger end ved Identiteter mellem to af de 4 Retninger. Den sidste kan nok have flere Løsninger, men kun naar de 4 Værdier for βR omfattede mere end 180°, hvad der i vor Anvendelse ligefrem er umuligt.

k og 2. r og 2. R.

Under visse Forudsætninger kan k, det konstante Forhold mellem Areal og Tid, betragtes som bekjendt, og benyttes ved Bestemmelse af Interpolationsformlens Konstanter. F. Ex. efter en foreløbig grafisk Udjevning. Methoderne, der baseres herpaa, blive dog næppe bekvemme nok undtagen i det ene Tilfælde, at der foruden k er givet de til to forskjellige Tider svarende Værdier baade for Afstanden og Retningen.

11 a) Man vil efter I have

$$r_1 r_2 \left(10^{\alpha(R_2-R_1)} - 10^{\alpha(R_1-R_2)}\right) = \frac{4\,\alpha k}{\operatorname{Log} e}(t_1 - t_2)$$

eller

$$\varphi\left(\alpha(R_2 - R_1)\right) = \frac{2\,k(t_2 - t_1)}{r_1 r_2 (R_2 - R_1) \operatorname{Log} e} = \frac{2\,k(t_2 - t_1)}{r_1 r_2 (R_2 - R_1)}\varphi(0),$$

saa at altsaa under de nævnte Forudsætninger α kan beregnes direkte ved Tabellen over Funktionen φ, idet blot Retningerne regnes i samme Enhed som forudsat ved Bestemmelsen af k. Naar α er funden, beregnes de øvrige Konstanter som i Tilfældet (2 . r og 3 . R).

11 b) Efter II har man

$$r_1 r_2 \sin \beta (R_2 - R_1) = 2\,k\beta(t_2 - t_1),$$

og altsaa, naar det erindres, at Tabellen for ψ Funktionen forudsætter Argumentet udtrykt i Grader,

$$\psi\left(\beta(R_2 - R_1)\right) = \frac{2\,k(t_2 - t_1)}{r_1 r_2 (R_2 - R_1)}\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{2\,k(t_2 - t_1)}{r_2 r_1 (R_2 - R_1)}\psi(0).$$

β bestemmes altsaa paa ganske analog Maade til α's ovenstaaende Bestemmelse. Og med β beregnes ogsaa de øvrige Konstanter som i Tilfældet (2 . r og 3 . R).

Methoderne 11) kunne ved Baneberegninger efter de exakte Formler bruges til at interpolere i Efemeriderne. Navnligt naar Banens Excentricitet er stor, er der en Del Arbejde forbundet med at løse et stort Antal kepplerske Ligninger til Bestemmelse af de excentriske Anomalier. Man vil kunne nøjes med et ringe Antal af strengt beregnede Efemeridepositioner, naar man forbinder disse parvis med Interpolationsformler, beregnede efter ovenstaaende Methoder 11.

Tabel over Funktionen: $\text{Log}\ \frac{10^x - 10^{-x}}{2\,x} = \text{Log}\ \varphi(x).$

x		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Δ
·00	·36	222	222	222	222	222	223	223	223	224	225	0
·01		225	226	227	228	229	230	231	233	234	235	2
·02		237	238	240	242	244	246	248	250	252	254	2
·03		256	258	261	263	266	269	271	274	277	280	3
·04		283	286	289	293	296	299	303	306	310	314	3
·05		317	321	325	329	333	338	342	346	351	355	5
·06		360	364	369	374	379	384	389	394	399	404	5
·07		409	415	420	426	432	437	443	449	455	461	6
·08		467	473	479	486	492	498	505	512	518	525	7
·09		532	539	546	553	560	567	575	582	590	597	8
·10		605	612	620	628	636	644	652	660	668	677	8
·11		685	693	702	711	719	728	737	746	755	764	9
·12		773	782	791	801	810	820	829	839	849	858	10
·13		868	878	888	898	908	919	929	939	950	961	10
·14		971	982	993	*004	*014	*025	*037	*048	*059	*070	12
·15	·37	082	093	105	116	128	140	152	163	175	187	13
·16		200	212	224	236	249	261	274	287	299	312	13
·17		325	338	351	364	377	391	404	417	431	444	14
·18		458	472	485	499	513	527	541	555	570	584	14
·19		598	613	627	642	656	671	686	701	716	731	15
·20		746	761	776	792	807	823	838	854	869	885	16
·21		901	917	933	949	965	981	998	*014	*030	*047	16
·22	·38	063	080	097	114	130	147	164	181	199	216	17
·23		233	250	268	285	303	321	338	356	374	392	18
·24		410	428	446	464	483	501	520	538	557	575	19
·25		594	613	632	651	670	689	708	727	747	766	20
·26		786	805	825	844	864	884	904	924	944	964	20
·27		984	*004	*025	*045	*065	*086	*107	*127	*148	*169	21
·28	·39	190	211	232	253	274	295	316	338	359	381	21
.29		402	424	446	468	489	511	533	555	578	600	22
·30		622	644	667	689	712	735	757	780	803	826	23
·31		849	872	895	918	942	965	988	*012	*035	*059	24
·32	·40	083	106	130	154	178	202	226	250	274	299	24
·33		323	348	372	397	421	446	471	496	521	546	25
·34		571	596	621	646	672	697	722	748	774	799	26
·35		825	851	877	903	929	955	981	*007	*033	*060	26
·36	·41	086	112	139	166	192	219	246	273	300	327	27
·37		354	381	408	435	463	490	518	545	573	600	28
·38		628	656	684	712	740	768	796	824	853	881	28
·39		909	938	966	995	*024	*052	*081	*110	*139	*168	29
·40	·42	197	226	255	285	314	343	373	402	432	461	30
·41		491	521	551	581	611	641	671	701	731	761	31
·42		792	822	853	883	914	945	975	*006	*037	*068	31
·43	·43	099	130	161	192	224	255	286	318	349	381	31
·44		412	444	476	508	540	572	604	636	668	700	32
·45		732	765	797	829	862	894	927	960	993	*025	33
·46	·44	058	091	124	157	190	224	257	290	324	357	34
·47		391	424	458	491	525	559	593	627	661	695	34
·48		729	763	797	832	866	901	935	970	*004	*039	35
·49	·45	074	108	143	178	213	248	283	318	354	389	35
·50		424	460	495	531	566	602	638	673	709	745	

$$\text{Log}\ \frac{10^{x} - 10^{-x}}{2\,x} = \text{Log}\ \varphi(x).$$

x		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Δ
·50	·45	424	460	495	531	566	602	638	673	709	745	36
·51		781	817	853	889	925	961	998	*034	*070	*107	36
·52	·46	143	180	217	253	290	327	364	401	438	475	37
·53		512	549	586	624	661	698	736	773	811	849	37
·54		886	924	962	*000	*038	*076	*114	*152	*190	*228	38
·55	·47	266	305	343	381	420	458	497	536	574	613	39
·56		652	691	730	769	808	847	886	926	965	*004	40
·57	·48	044	083	123	162	202	241	281	321	361	401	40
·58		441	481	521	561	601	641	682	722	762	803	40
·59		843	884	924	965	*006	*047	*087	*128	*169	*210	41
·60	·49	251	293	334	375	416	458	499	540	582	623	42
·61		665	707	748	790	832	874	916	958	*000	*042	42
·62	·50	084	126	168	211	253	295	338	380	423	466	42
·63		508	551	594	637	679	722	765	808	851	895	43
·64		938	981	*024	*068	*111	*155	*198	*242	*285	*329	44
·65	·51	373	416	460	504	548	592	636	680	724	768	45
·66		813	857	901	946	990	*034	*079	*124	*168	*213	45
·67	·52	258	302	347	492	437	482	527	572	617	663	45
·68		708	753	798	544	889	935	980	*026	*071	*117	46
·69	·53	163	209	254	300	346	392	438	484	530	577	46
·70		623	669	715	762	808	855	901	948	994	*041	47
·71	·54	088	135	181	228	275	322	369	416	463	510	48
·72		558	605	652	699	747	794	842	889	937	984	48
·73	·55	032	080	128	175	223	271	319	367	415	463	48
·74		511	560	608	656	704	753	801	850	898	947	48
·75		995	*044	*093	*141	*190	*239	*288	*337	*386	*435	49
·76	·56	484	533	582	631	681	730	779	829	878	927	50
·77		977	*027	*076	*126	*176	*225	*275	*325	*375	*425	50
·78	·57	475	525	575	625	675	725	775	826	876	926	51
·79		977	*027	*078	*128	*179	*229	*280	*331	*382	*432	51
·80	·58	483	534	585	636	687	738	789	840	891	943	51
·81		994	*045	*097	*148	*200	*251	*303	*354	*406	*457	52
·82	·59	509	561	613	665	716	768	820	872	924	976	53
·83	·60	029	081	133	185	237	290	342	395	447	500	52
·84		552	605	657	710	763	815	868	921	974	*027	53
·85	·61	080	133	186	239	292	345	398	452	505	558	54
·86		612	665	718	772	825	879	933	986	*040	*094	54
·87	·62	148	201	255	309	363	417	471	525	579	633	54
·88		687	742	796	850	904	959	*013	*068	*122	*177	54
·89	·63	231	286	340	395	450	505	559	614	669	724	55
·90		779	834	889	944	999	*054	*109	*165	*220	*275	56
·91	·64	331	386	441	497	552	608	663	719	775	830	56
·92		886	942	997	*053	*109	*165	*221	*277	*333	*389	56
·93	·65	445	501	557	614	670	726	782	839	895	951	57
·94	·66	008	064	121	177	234	291	347	404	461	518	56
·95		574	631	688	745	802	859	916	973	*030	*087	58
·96	·67	145	202	259	316	374	431	488	546	603	661	57
·97		718	776	833	891	949	*007	*064	*122	*180	*238	58
·98	·68	296	354	411	469	527	586	644	702	760	818	58
·99		876	935	993	*051	*110	*168	*226	*285	*343	*402	59
1·00	·69	461										

Tabel over Funktionen: $\text{Log}\ \frac{\sin x}{x} = \text{Log}\ \psi(x)$.

x		·0	·1	·2	·3	·4	·5	·6	·7	·8	·9	$\varDelta$
0°	8·24	188	188	188	188	187	187	187	187	186	186	0
1		186	185	185	184	183	183	182	181	181	180	1
2		179	178	177	176	175	174	173	172	170	169	1
3		168	167	165	164	162	161	159	158	156	154	2
4		152	151	149	147	145	143	141	139	137	135	2
5		133	130	128	126	123	121	119	116	114	111	3
6		108	106	103	100	097	095	092	089	086	083	3
7		080	077	073	070	067	064	060	057	054	050	3
8		047	043	039	036	032	028	025	021	017	013	4
9		009	005	001	*997	*993	*989	*984	*980	*976	*971	4
10	8·23	967	963	958	953	948	944	940	935	930	925	4
11		921	916	911	906	901	896	891	885	380	875	5
12		879	864	859	853	848	843	837	832	826	820	6
13		814	809	803	797	791	785	779	773	767	761	6
14		755	748	742	736	730	723	717	710	704	697	7
15		690	684	677	670	664	657	650	643	636	629	7
16		622	615	608	600	593	586	578	571	564	556	7
17		549	541	533	526	518	510	503	495	487	479	8
18		471	463	455	447	439	430	422	414	406	397	8
19		389	380	872	363	355	346	337	329	320	311	9
20		302	293	284	275	266	257	248	239	230	220	9
21		211	202	192	183	173	164	154	144	135	125	10
22		115	105	096	086	076	066	056	046	035	025	10
23		015	005	*994	*984	*974	*963	*953	*942	*932	*921	11
24	8·22	910	899	889	878	867	856	845	834	823	812	11
25		801	790	779	767	756	744	733	722	710	698	11
26		687	675	664	652	640	628	616	604	592	580	12
27		568	556	544	532	520	507	495	483	470	458	13
28		445	433	420	407	395	382	369	356	343	330	13
29		317	304	291	278	265	252	238	225	212	198	13
30		185	171	158	144	131	117	103	089	076	062	14
31		048	034	020	006	*992	*977	*963	*949	*935	*920	14
32	8·21	906	892	877	863	848	833	819	804	789	774	15
33		759	745	730	715	700	684	669	654	639	624	16
34		608	593	577	562	546	531	515	500	484	468	16
35		452	436	421	405	389	373	356	340	324	308	16
36		292	275	259	242	226	209	193	176	160	143	17
37		126	109	092	076	059	042	025	007	*990	*973	17
38	8·20	956	939	921	904	886	869	851	834	816	798	17
39		781	763	745	727	709	691	673	655	637	619	18
40		601	582	564	546	527	509	490	472	453	435	19
41		416	397	378	360	341	322	303	284	264	245	19
42		226	207	188	168	149	129	110	090	071	051	20
43		031	012	*992	*972	*952	*932	*912	*892	*872	*852	20
44	8·19	832	812	791	771	751	730	710	689	669	648	21
45		627	607	586	565	544	523	502	481	460	439	21
46		418	396	375	354	332	311	289	268	246	225	22
47		203	181	159	138	116	094	072	050	028	005	22
48	8·18	983	961	939	916	894	871	849	826	804	781	23
49		758	736	713	690	667	644	621	598	575	552	24
50		528	505	482	458	435	411	388	364	341	317	24

$$\mathrm{Log}\,\frac{\sin x}{x} = \mathrm{Log}\,\psi(x).$$

x		·0	·1	·2	·3	·4	·5	·6	·7	·8	·9	Δ
50°	8·18	528	505	482	458	435	411	388	364	341	317	24
51		293	269	246	222	198	174	150	126	101	077	24
52		053	029	004	*980	*955	*931	*906	*882	*857	*832	25
53	8·17	807	782	758	733	708	682	657	632	607	582	26
54		556	531	506	480	455	429	403	378	352	326	26
55		300	274	248	222	196	170	144	118	091	065	26
56		039	012	*986	*959	*932	*906	*879	*852	*825	*799	27
57	8·16	772	745	718	691	663	636	609	582	554	527	28
58		499	472	444	416	389	361	333	305	277	249	28
59		221	193	165	137	109	080	052	024	*995	*967	29
60	8·15	938	909	881	852	823	794	765	736	707	678	29
61		649	620	590	561	532	502	473	443	414	384	30
62		354	325	295	265	235	205	175	145	115	084	30
63		054	024	*993	*963	*932	*902	*871	*840	*810	*779	31
64	8·14	748	717	686	655	624	593	562	530	499	468	32
65		436	405	373	342	310	278	246	215	183	151	32
66		119	087	054	022	*990	*958	*925	*893	*860	*828	33
67	8·13	795	762	730	697	664	631	598	565	532	499	33
68		466	432	399	366	332	299	265	232	198	164	34
69		130	096	062	028	*994	*960	*926	*892	*858	*823	34
70	8·12	789	754	720	685	650	616	581	546	511	476	35
71		441	406	371	336	300	265	230	194	159	123	36
72		087	052	016	*980	*944	*908	*872	*836	*800	*764	37
73	8·11	727	691	655	618	582	545	508	472	435	398	37
74		361	324	287	250	213	175	138	101	063	026	38
75	8·10	988	951	913	875	837	799	762	723	685	647	38
76		609	571	532	494	456	417	378	340	301	262	39
77		223	184	145	106	067	028	*989	*949	*910	*871	40
78	8·09	831	791	752	712	672	632	592	552	512	472	40
79		432	392	351	311	270	230	189	149	108	067	41
80		026	*985	*944	*903	*862	*821	*779	*738	*697	*655	42
81	8·08	613	572	530	488	446	405	363	321	278	236	42
82		194	152	109	067	024	*981	*939	*896	*853	*810	43
83	8·07	767	724	681	638	595	551	508	464	421	377	43
84		334	290	246	202	158	114	070	026	*981	*937	44
85	8·06	893	848	803	759	714	669	624	579	534	489	45
86		444	399	354	308	263	217	172	126	080	034	45
87	8·05	989	943	896	850	804	758	711	665	619	572	47
88		525	479	432	385	338	291	244	196	149	102	48
89		054	007	*959	*912	*864	*816	*768	*720	*672	*624	48
90	8·04	576	527	479	431	382	333	285	236	187	138	49
91		089	040	*991	*942	*892	*843	*794	*744	*694	*645	50
92	8·03	595	545	495	445	395	345	294	244	193	143	51
93		092	041	*991	*940	*889	*838	*787	*735	*684	*633	52
94	8·02	581	530	478	426	375	323	271	219	166	114	52
95		062	010	*957	*905	*852	*799	*746	*694	*641	*587	53
96	8·01	534	481	428	374	321	267	214	160	106	052	54
97	8·00	998	944	890	835	781	726	672	617	562	508	55
98		453	398	343	287	232	177	121	066	010	*954	56
99	7·99	898	843	787	730	674	618	562	505	449	392	57
100		335										